REZUMAT TEZA DE DOCTORAT: QUALITATIVE ANALYSIS ON SOME CLASSES OF NONLINEAR PROBLEMS

CEZAR LUPU

Lurarea de faţă intitulată *Metode calitative in studiul unor clase de probleme neliniare* a fost realizată in programul doctoral POSDRU 2008-2013 sub indrumarea domnului profesor universitar doctor *Vicenţiu Rădulescu* la Universitatea din Craiova.

Teza este structurată pe două părţi având în total 6 capitole. Prima parte este dedicată unor probleme de medie (existenţă de zeroruri) pentru diverşi operatori integrali de tip Volterra, iar cea de doua parte eşte concentrată unor probleme neliniare din teoria inegalităţilor variaţionale şi hemivariaţionale, cu precădere din inegalităţi variaţionale-hemivariaţionale şi de tip variaţionale.

Capitolul 1 intitulat **The development of some mean value theorems and the Volterra operator** pune accent pe o teoremă de medie datorată lui Flett in anul 1958 şi care afirmă că dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e derivabilă pe (a, b), continuă pe $[a, b]$, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Mai mult, in acest capitol sunt discutate extinderi şi generalizări ale teoremei lui Flett. în cea de-a doua parte a capitolului, sunt discutate anumite proprietăţi elementare ale operatorului lui Volterra, $V : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$,

$$Vf(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Capitolul 2 intitulat **Mean value theorems for some linear integral operators** este dedicat studierii unor probleme de medie pentru operatori integrali de tip Volterra si constituie obiectul articolului *Mean value theorems for some linear integral operators* publicat în *Electronic Journal of Differential Equations,* ***2009*** *(2009), no. 117, pp. 1–15* în colaborare cu *Tudorel Lupu.* Menţionăm că articolul menţionat mai sus este citat în:

- Y. Lu, N. Yang, Symbol error probability of QAM with MRC diversity in two-wave with diffuse power fading channels, *IEEE Communications Letters*, **15** (2011), 10–12.
- D. Cakmak, A. Tiryaki, Mean value theorem for holomorphic functions, *Eletronic Journal of Differential Equations*, **2012** (2012), No. 34, 1–6.

- O. Hutnik, J. Molnarova, Flett's mean value theorem: a survery, *preprint* (September 2013) at `arxiv.org/pdf/1309.5715.pdf`.

În acest capitol studiem existenţa de zerouri pentru anumiţi operatori integrali de tip Volterra folosindu-ne in principal de teorema de medie a lui Flett. Mai precis este vorba despre urmatorii operatorii integrali:

$$T\phi(t) := \phi(t) - \int_0^t \phi(x)dx,$$
$$S\Psi(t) := t\Psi(t) - \int_0^t x\Psi(x)dx,$$

şi

$$R\xi(t) := \xi(t) - \xi'(t)\int_0^t \xi(x)dx,$$
$$V\rho(t) := t\rho(t) - \rho'(t)\int_0^t x\rho(x)dx,$$

unde $\phi, \Psi \in C([0,1])$ şi $\xi, \rho \in C^1([0,1])$.

Un prim rezultat pricipal al captolului afirmă că urmă toarele probleme de medie

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx \cdot Tg(c_1) &= \int_0^1 g(x)dx \cdot Tf(c_1), \\ Tf(c_2) &= Sf(c_2), \\ \int_0^1 f(x)dx \cdot Sg(\tilde{c_4}) &= \int_0^1 g(x)dx \cdot Sf(\tilde{c_4}) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

au soluţiile $c_1, c_2, \tilde{c_4} \in (0,1)$ pentru $f, g \in C([0,1])$.
Al doilea rezultat pricipal afirmă că problemele de medie

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)f(x)dx \cdot Tg(c_7) &= \int_0^1 (1-x)g(x)dx \cdot Tf(c_7), \\ \int_0^1 (1-x)f(x)dx \cdot Sg(\tilde{c_7}) &= \int_0^1 g(1-x)(x)dx \cdot Sf(\tilde{c_7}) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

au soluţiile $c_7, \tilde{c_7} \in (0,1)$ pentru $f, g \in C([0,1])$.
Tot în acelaşi capitol mai sunt demonstrate si alte rezultate similare, printre care problemele de medie

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx \cdot Rg(c_3) &= \int_0^1 g(x)dx \cdot Rf(c_3), \\ \int_0^1 f(x)dx \cdot Vg(\overline{c}_4) &= \int_0^1 g(x)dx \cdot Vf(\overline{c}_4) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

au soluţiile $c_3, \overline{c}_4 \in (0,1)$ pentru $f, g \in C^1([0,1])$, şi

$$
(4) \qquad \begin{cases} \int_0^1 (1-x)f(x)dx \cdot Rg(c_8) = \int_0^1 (1-x)g(x)dx \cdot Rf(c_8), \\ \int_0^1 (1-x)f(x)dx \cdot Vg(\tilde{c_8}) = \int_0^1 (1-x)g(x)dx \cdot Vf(\tilde{c_8}) \end{cases}
$$

au soluţiile $c_8, \tilde{c_8} \in (0,1)$ pentru $f, g \in C([0,1])$.

Capitolul 3 intitulat **Mean value problems of Flett type for a Volterra operator** constituie obiectul articolului *Mean value problems of Flett type for a Volterra operator* publicat în *Electronic Journal of Differential Equations, vol.* ***2009*** *(2009), No. 53, pp. 1–7.* Pe de altă parte, secţiunea 3.2 conţine un rezultat privind zerourile operatorului Volterra în spaţiul Banach al funcţiilor continue cu integrala nulă. Rezultatul este inclus în articolul *Zeroes of functions in the image of a Volterra operator* publicat în *Gazeta Matematică, A-series,* ***27*** *(2009), 209–213* cu *Radu Gologan.* Ambele articole au fost citate în lucrarea:

- O. Hutnik, J. Molnarova, Flett's mean value theorem: a survery, *preprint* (September 2013) at `arxiv.org/pdf/1309.5715.pdf`.

În acest capitol, arătăm, în primul rând că problema de medie,

$$
(5) \qquad \int_0^1 f(x)dx \cdot V_\phi g(c) = \int_0^1 g(x)dx \cdot V_\phi f(c)
$$

are cel puţin o soluţie $c \in (0,1)$, unde $f, g \in C([0,1])$ şi $\phi \in C^1([0,1])$ satisface anumite condiţii, unde $V_\phi f(t) := \int_0^t \phi(x)f(x)dx$ operatorul Volterra.

Secţiunea 3.3 a capitolului debutează cu un alt rezultat privind zerourile operatorului Volterra care generalizează rezultatul din sec tiunea precedentă. Mai precis, problema de medie

$$
(6) \qquad V_g f(c) = g(a) \cdot Vf(c)
$$

are o soluţie $c \in (a,b)$ unde $f \in C_{\mathrm{null}}([a,b])$ and $g \in C^1([a,b])$, şi $g'(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in [a,b]$.

Mai mult, un alt rezultat este faptul că problema de medie,

(7)

$$
V_\phi f(x_0) \int_0^1 g(x)dx - V_\phi g(x_0) \int_0^1 f(x)dx = \phi(0) \left(Vf(x_0) \int_0^1 g(x)dx - Vg(x_0) \int_0^1 f(x)dx \right)
$$

are cel puţin o soluţie $x_0 \in (0,1)$ unde $f, g \in C([0,1])$.

Capitolul 4 intitulat **Variational, Variational-Hemivariational and Variational-like Inequalities. A brief review.** marchează o scurtă introducere in teoria inegalităţilor variaţionale, variaţional-hemivariationale şi de tip variaţional.

Capitotlul debutează prin introducerea noţiunilor caracteristice teoriilor din analiza convexă şi analiza Lipschitz. printre care enumerăm: aplicaţii inferior (superior) semicontinue, funcţionale convexe, derivata generalizată în sensul lui Clarke, etc.

În al doilea rând, vom trece în revistă unele chestiuni legate de teoria operatorilor monotoni multivoci care vor fi folosite în capitolele următoare în obţinerea existenţei de soluţii pentru probleme de inegalităţi variaţional-hemivariaţionale şi de tip variaţional. Problema clasică a inegalităţii variaţionale constă în găsirea unui $u \in K$,unde K este o submulţime a unui spaţiu Banach X care satisface anumite proprietăţi de compacitate şi convexitate, astfel încât

$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0, \forall v \in K, \tag{8}$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ reprezintă produsul scalar în dualitate.

În general, inegalităţile variaţionale sunt formulate în spaţii finit dimensionale şi infinit dimensionale. Aceste idei au fost extinse şi generalizate mai târziu la o nouă clasănumită clasa inegalităţilor hemivariaţionale. Teoria inegalităţilor hemivariaţionale a fost introdusă pentru prima dată de Panagiotopoulos. Problema de bază teoriei inegalităţilor hemivariaţionale este următoarea:

Să se gaăsească $u \in K$ astfel încât fiind dat un operator neliniar $A : H \to H$, unde H este un spaţiu Hilbert real, să avem:

$$\langle Au, v-u\rangle + \int_{\Omega} f^0(x, u, v-u) d\Omega \geq 0, \forall v \in K. \tag{9}$$

Aici $f^0(x, u, v-u)$ reprezintă derivata direcţională generalizată în sensul lui Clarke. Panagiotopoulos a stuadiat acest tip de inegalităţi în vederea formulării unor principii variaţionale asociate unot funcţinale energetice care nu sunt convexe. În cazul în care $f = 0$, problema (0.9) se transformă în problema clasică de inegalităţi variaţionale (0.8).

În 1989, Parida, Sahoo and Kumar au propus un alt tip de inegalitate variaţioanlă, anume *inegalitatea de tip variaţional* care constă în următoarea problemă:
Să se găsească $u \in K$ astfel încât pentru aplicaţiile continue $A : K \to \mathbb{R}^n$ şi $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$, să aibă loc

$$\langle Au, \eta(v, u)\rangle \geq 0, \forall v \in K. \tag{10}$$

Dacă $\eta(u, v) = v - u$, obţinem din nou problema clasică de inegalităţi variaţionale (0.8).

Demonstraţiile existenţei de soluţii pentru acest tip de inegalităţi au la bază principii topologice de punct fix pentru aplicaţii multivoce ca Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, Ky Fan, Kakutani, Tarafdar, Mosco or Ansari-Yao. Spre exemplu, unul dintre cele mai folosite principii este cel datorat matematicianeilor Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz care afirmă următorul lucru:

Principiul KKM. *Fie K o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic Haussdorff E, iar $G : K \to 2^E$ reprezintă o aplicaţie multivocă care satisface următoarele condiţii:*

(i) G are proprietatea KKM: oricare ar fi $\{x_1, x_2 \dots, x_n\} \subseteq K$, avem $\mathrm{co}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$, unde $\mathrm{co}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ reprezintă acoperirea convexă a mulţimii $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

(ii) $g(x)$ este închisă în E oricare ar fi $x \in K$;

(iii) $G(x_0)$ este compactă în E pentru orice $x_0 \in K$.

Atunci are loc

$$\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \emptyset.$$

Capitolul 5 intitulat **Variational-Hemivariational inequalities involving set-valued mappings** constituie obiectul articolului *On a class of variational-hemivariational inequalities involving set valued mappings* publicat în revista *Advances in Pure and Applied Mathematics,* ***1*** *(2010), 233–246*, în colaborare cu *Nicuşor Costea.* Articolul a fost citat în:

- Y. L. Zhang, Y. R. He, On stably quasimonotone hemivariational inequalities, *Nonlinear Analysis (TMA)* **74** (2011), 3324–3332.
- G. Tang, N-J. Huang, Existence theorems of the variational-hemivariational inequalities, *Journal of Global Optimization* **56** (2013), 605–622.
- Y. L. Zhang, Y. R. He, The hemivariational inequalities for an upper semicontinuous set-valued mapping, *Journal of Optimization Theory and Applications* **156** (2013), 716–725.
- R. Wankeeree, P. Preeschasilp, Existence theorems of the hemivariational inequality governed by a multi-valued map perturbed with a nonlineaer term in Banach spaces, *J. Global Optim.* **57** (2013), 1447–1464.

În acest capitol sunt stabilite rezultate de existenţă pentru inegalităţi variaţionale-hemivariaţionale pentru aplicaţii multivoce monotone definite pe submulţimi mărginite, închise şi convexe ale unui spaţiu Banach reflexiv. Problema principală pe care o studiem este următoarea:

Să se găsească $u \in K$ and $u^* \in A(u)$ astfel încât

$$\langle u^*, v - u \rangle + \phi(v) - \phi(u) + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}(x); \hat{v}(x) - \hat{u}(x))\, dx \geq 0, \quad \forall v \in K, \tag{11}$$

care este în conexiune cu problema duală

$$\sup_{v^* \in A(v)} \langle v^*, u - v\rangle \leq \phi(v) - \phi(u) + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}(x); \hat{v}(x) - \hat{u}(x))\, dx, \quad \forall v \in K. \tag{12}$$

Folosind principiul KKM precum şi alte principii topologice, este stabilit faptul că dacă K este o submulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Banach real relfexiv X, iar $A : K \to 2^{X^*}$ este o apliucaţie multivocă monotonă şi inferior semicontinuă pe mulţimea K, şi dacă $T : X \to L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$ este operator liniar compact iar j satisface condiţia:

$$|z| \leq C(1 + |y|^{p-1})$$

almost everywhere $x \in w$, for all $y \in \mathbb{R}^k$ and $z \in \partial j(x, y)$, atunci inegalitatea vaariaţională-hemivariţională (0.11) are cel puţin o soluţie.

Ideea principală a demonstraţiei este să aplicăm principiul KKM aplicaţiilor $F, G : D(\varphi) \to 2^X$ care sutn definite mai jos:

$$F(v) = \Big\{ u \in K \cap D(\phi) : \exists u^* \in A(u) \text{ such that } \langle u^*, v - u\rangle + \phi(v) - \phi(u) + \\ + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}(x); \hat{v}(x) - \hat{u}(x))\, dx \geq 0 \Big\}$$

and

$$G(v) = \left\{ u \in K \cap D(\phi) : \sup_{v^* \in A(v)} \langle v^*, u - v\rangle \leq \phi(v) - \phi(u) + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}(x); \hat{v}(x) - \hat{u}(x))\, dx \right\}.$$

De asemenea sunt obţinute rezultate de existenţă pentru problema

$$\langle u_n^*, v - u_n\rangle + \phi(v) - \phi(u_n) + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}_n(x); \hat{v}_n(x) - \hat{u}_n(x)) dx \geq 0 \tag{13}$$

oricare ar fi $v \in K_n$ şi pentru orice $n \geq 1$.

Capitolul 6 intitulat **Variational-like inequality problems involving set-valued maps and generalized monotonicity** is based on the paper *Variational-like inequality problems involving set-valued maps and generalized monotonicity* publicat în *Journal of Optimization Theory and Applications,* ***155*** *(2012), 79–99* în colaborare cu *Nicuşor Costea* şi *Daniel Alexandru Ion.* Articolul a fost recent citat în:

- S. Park, Recent applications of the Fan-KKM theorem, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* (RIMS-Kyoto), va apărea.

Scopul acestui capitol este stabilirea unor rezultate de existenţă pentru inegalitatăţi de tip variaţional pentru aplicaţii multivoce defnite pe o submulţime K a unui spaţiu Banach. Rezultatele obţinute în acest capitol au loc atât în spaţii Banach relexive cât şi nereflexive. Atunci când submulţimea K este compactă şi convexă sunt obţinute rezultate de existenţă pentru inegalitatea de tip variaţional. Pe de altă parte, dacă renunţăm la compacitatea lui K, atunci trebuiesc impuse anumite condiţii de monotonie operatorului multivoc A în vederea obţinerii existenţei de soluţii pentru problemele inegalitţilor de tip variaţional.

Problemele principale studiate sunt următoarele inegalităţi de tip variaţional:

Să se găsească $u \in K \cap D(\phi)$ stfel încât

$$\exists u^* \in A(u) : \langle u^*, \eta(v,u)\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \forall v \in K, \tag{14}$$

and

Să se găsească $u \in K$ astfel încât

$$\exists u^* \in A(u) : \langle u^*, \eta(v,u)\rangle \geq 0, \forall v \in K, \tag{15}$$

unde $K \subseteq X^{**}$ este nevidă, închisă şi convexă, $\eta : K \times K \to X^{**}$, $A \rightrightarrows X^*$ este o aplicaţie multivocă, iar $\phi : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ este o funcţionlă proprie, convexă şi inferior semicontinuă astfel încât $K_\phi := K \cap D(\phi) \neq \emptyset$. $D(\phi)$ reprezintă domeniul funcţionalei ϕ, i.e. $D(\phi) = \{u \in X^{**} : \phi(u) < +\infty\}$.

Unul din rezultatele principale ale capitolului afirmă că dacă K este o submulţimea nevidă, închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Banach real X, iar aplicaţia $A : K \rightrightarrows X^*$ *relaxed* $\eta - \alpha$ *monotonă*, în anumite condiţii, problem (0.14) admite cel puţin o soluţie clasică precum şi o soluţie tare.

Ideea pricipală de demonstraţie este aplicarea alternativei the Mosco pentru topologia slabă a lui X, şi definim $\xi, \zeta : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$\xi(v,u) = -\inf_{v^* \in A(v)} \langle v^*, \eta(v,u)\rangle + \alpha(v-u),$$

şi

$$\zeta(v,u) = \sup_{u^* \in A(u)} \langle u^*, \eta(u,v)\rangle.$$

Pe de altă parte vom utiliza şi principiul KKM pentru obţinerea de soluţii clasice şi tari în cazul în care aplicaţia multivocă A este *relaxed* $\eta - \alpha$ *quasimonotonă.*